

Задаци - друга недеља

задаци са * су посебно важни

- Нека је ρ релација еквиваленције.
 - Доказати да је A/ρ разлагање скупа A
 - Доказати да свако разлагање $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(A)$ скупа A индукује јединствену релацију еквиваленције ρ тако да важи $\mathcal{A} = A/\rho$.
- Доказати да је $\equiv \pmod{p}$ релација еквиваленције на $\mathbb{Z}$. (Напомена: $m \equiv n \pmod{p} \Leftrightarrow p|m-n$)
Наћи класе еквиваленције и количнички простор.
- Нека је задата релација дељивости $|$ на $\mathbb{N}$.
 - Доказати да је $|$ поредак на $\mathbb{N}$.
 - Да ли је $|$ тотални поредак?
 - Да ли је $|$ поредак на $\mathbb{Z}$?
- Наћи све релације које су уједно и релације поретка и релације еквиваленције на неком скупу A .
- Нека је $(A, \leq)$ уређен скуп и $S \subseteq A$. Доказати да је минимум скупа S јединствен ако постоји.
- Доказати да важи:
$$M = \max S \Leftrightarrow M = \sup S \wedge M \in S$$
$$m = \min S \Leftrightarrow m = \inf S \wedge m \in S$$
- * Нека је $\mathcal{A}$ фамилија у $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$. Доказати да је $\sup \mathcal{A} = \cup \mathcal{A}$ и $\inf \mathcal{A} = \cap \mathcal{A}$.
- * Доказати да је уређен скуп $(A, \leq)$ комплетан ако и само ако сваки одоздо ограничен скуп у A има инфимум. Другим речима, показати да је:

Аксиома супремума $\Leftrightarrow$ Аксиома инфимума.

- Доказати следеће:
 - $\Gamma_1 \circ \Gamma_2(S) = \Gamma_1(\Gamma_2(S))$
 - $\pi_1(\Gamma_1 \circ \Gamma_2) = \Gamma_2^{-1}(\pi_1 \Gamma_1)$ - засек инверзног графика
 - $\pi_2(\Gamma_1 \circ \Gamma_2) = \Gamma_1(\pi_2 \Gamma_2)$
 - $\Gamma(A \cap B) \subseteq \Gamma(A) \cap \Gamma(B)$ - да ли важи једнакост?
 - $\Gamma(A) = \Gamma(A \cap \pi_1(\Gamma))$.
- Нека су $\Gamma_1 \subseteq A \times B$ и $\Gamma_2 \subseteq X \times Y$ функционални графици. Доказати да је тада $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \subseteq (A \times X) \times (B \times Y)$ такође функционални график.
- Нека су $f : X \rightarrow Y$ и $g : A \rightarrow B$ функције. Доказати $(f \times g)(x, a) = (f(x), g(a))$.

12.* Нека је $f = (F, X, Y)$ функција. Доказати:

(а) f је инјективно $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in X) f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

(б) f је сурјективно $\Leftrightarrow (\forall y \in Y) (\exists x \in X) f(x) = y$.

13. Нека је дата релација $\sim$ на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ тако да је $(x, y) \sim (s, t) \Leftrightarrow x - s \in \mathbb{Z}$ и $y - t \in \mathbb{Z}$. Доказати да је $\sim$ релација еквиваленције и наћи количнички скуп $\mathbb{R} \times \mathbb{R} / \sim$.

14.* Нека је $(A, \leq)$ уређен скуп, $S, T \in \mathcal{P}(A)$ и $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(A)$ фамилија подскупова. Тада важи:

(а) $s = \sup \emptyset \Leftrightarrow s = \min A$

$t = \inf \emptyset \Leftrightarrow t = \max A$

(б) Ако је $S \neq \emptyset$ и постоје $\sup S$ и $\inf S$, онда важи $\inf S \leq \sup S$

(в) Ако су $S, T \neq \emptyset$ и имају $\sup$ и $\inf$, онда:

$$S \subseteq T \Rightarrow \inf T \leq \inf S \leq \sup S \leq \sup T$$

(г) Нека за све $X \in \mathcal{A}$ постоји $\sup X$. Тада важи:

$$\exists \sup \bigcup_{X \in \mathcal{A}} X \Leftrightarrow \exists \sup \{\sup X \mid X \in \mathcal{A}\}.$$

15. Нека је $(A, \leq)$ уређен скуп, $f : S \times T \rightarrow A$ пресликавање. Ако постоји $\sup f$, онда је

$$\sup f = \sup_{s \in S} (\sup_{t \in T} f(s, t)).$$

16. Нека је $f : (A, \leq_A) \rightarrow (B, \leq_B)$ строго монотono сурјективно пресликавање. Доказати:

(а) f има инверзно пресликавање

(б) f и f^{-1} су изоморфизми уређених структура.

17. Нека је $f : (A, \leq_A) \rightarrow (B, \leq_B)$ изоморфизам уређених скупова и $S \subseteq A$. Доказати да је:

(а) $f(\max S) = \max f(S)$, уколико постоји $\max S$

(б) $f(\sup S) = \sup f(S)$, уколико постоји $\sup S$.